DOPPIO CONO SALIENTE (PARADOSSO MECCANICO)

L'apparecchio, montato su un tavolino, si compone di un telaio trapezoidale sul quale è poggiata una coppia di coni d'ottone, uniti per le loro basi da un disco di legno. Ponendo i coni sulla parte inferiore del telaio, essi rotolano verso la parte superiore, dando così l'impressione di risalire un piano inclinato sfidando la forza di gravità. Per questo fenomeno, a prima vista assurdo, l'apparecchio viene spesso indicato come "paradosso meccanico". In realtà, i binari formati dagli spigoli superiori del telaio si divaricano e i due coni, rotolando, poggiano su punti sempre più prossimi ai loro vertici in modo tale che il loro centro di gravità scende, in perfetto accordo con le leggi della meccanica.

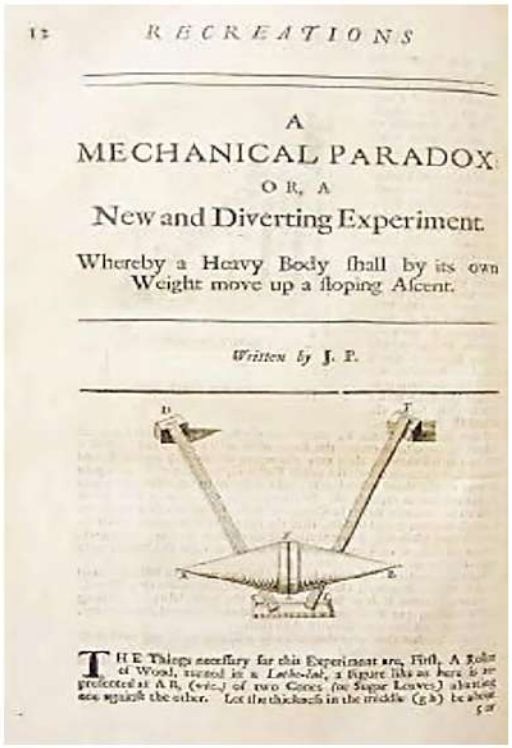
DOPPIO CONO SALIENTE (PARADOSSO MECCANICO)

18 aprile 1694. In questo particolare giorno a Londra furono emesse dal tribunale 29 condanne a morte, oltre a numerose ordinanze di marchiatura; ci sarebbero state 30 condanne a morte se la gravidanza di una donna non l'avesse salvata. Per quanto sorprendente possa sembrare la pubblicità costituiva una parte importante della pubblicazione degli atti giudiziari tra il 1680 e il 1750. La pubblicità di qualsiasi cosa, dai rimedi dei ciarlatani ai testi religiosi. Il 18 aprile del 1694 la seconda voce della lista era l'annuncio di un libro:

Piacere con profitto: composto da attività ricreative di vario tipo, vale a dire. Numerico, geometrico, matematico, astronomico, aritmetico, crittografico, magnetico, automatico, chimico e storico. Pubblicato per ricreare lo spirito ingegnoso e per indurre a esaminare ulteriormente queste (e simili) scienze sublimi. E per distogliere dal seguire i vizi, ai quali i giovani (di questa epoca) sono così inclini. Di William Laybourn, Filomate.

Se si deve credere all'autore di queste righe, allora coloro che furono processati al porto quel giorno si sarebbero potuti salvare dal loro terribile destino, se solo avessero avuto accesso a quest'opera.

In questo contesto vogliamo segnalate pagina 12 del *Piacere con profitto* in cui si vede chiaramente raffigurato per la prima volta il paradosso meccanico del doppio cono saliente.[Figura 1]



12 RECREATIONS

A
MECHANICAL PARADOX:
OR, A
New and Diverting Experiment.

Whereby a Heavy Body shall by its own Weight move up a sloping Ascent.

Written by J. P.

THE Things necessary for this Experiment are, First, A Roller of Wood, turned in a *Lozenge*, a figure like as here is represented at A B, (viz.) of two Cones (or Sugar Loaves) planted one against the other. Let the thickest in the middle (g h) be about 5 or

Figura 1 *Un dettaglio di pagina 12 di Piacere con Profitto.*

William Leybourn (1626-1719) (alias Oliver Wallingby) fu ai suoi tempi un illustre matematico, geometra e astronomo (anche se iniziò la sua vita lavorativa come tipografo).

Nel 1694 aveva pubblicato il volume ricreativo Piacere con profitto (*Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of divers kinds, viz.*.). Conteneva un delizioso puzzle meccanico, attribuito a un certo "J.P.", che è diventato noto come Uphill Roller.

Le pagine 12 e 13 del libro descrivono in dettaglio la costruzione di un doppio cono e due binari inclinati lungo i quali il cono può rotolare - in salita! Il suo paragrafo finale spiega il paradosso: anche se il cono risale il pendio, il suo centro di gravità si sposterà effettivamente verso il basso. I sensi possono essere ingannati: la legge di gravità no.

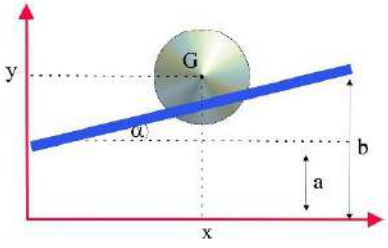


Figura 2

La Figura 2 mostra una sezione verticale dell'apparato. La linea inclinata rappresenta le superfici superiori delle rotaie su cui poggia il doppio cono. La parte inferiore della rotaia [Figura 2], si trova ad una altezza **a** dal suolo, mentre l'estremità superiore si trova ad una distanza **b**. La figura mostra anche la sezione trasversale del doppio cono. Il punto al centro di questa sezione trasversale è il baricentro del doppio cono, che chiameremo **G**. L'angolo di inclinazione delle rotaie è **α**. Fissiamo un sistema di coordinate come mostrato in figura e stabiliamo per il punto **G** le coordinate (***x,y***). Mentre il doppio cono rotola sulle rotaie, il suo centro di gravità **G** si sposta lungo un percorso descritto da un'equazione $y = f(x)$. Il nostro obiettivo è trovare questa equazione.

La figura 3 mostra la vista frontale, ovvero dal punto in cui le due rotaie si incontrano e osserviamo il cono in sezione verticale e trasversale. Il baricentro è **G**, e i punti **P** e **Q** sono i punti di appoggio del doppio cono sulle rotaie. I punti $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{Q_1}$ sono le proiezioni di questi tre punti sul suolo. L'angolo γ è la metà dell'angolo al vertice del cono.

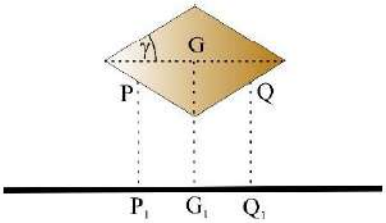


Figura 3

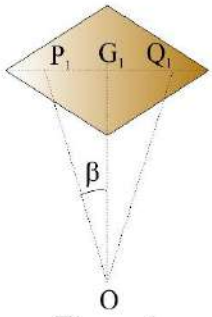


Figura 4

La Figura 4 mostra la proiezione dell'intero apparato al suolo. La forma a rombo è l'ombra che il doppio cono proietta sul pavimento e le due linee che partono dai punti $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{Q_1}$ sono le ombre proiettate dai due binari che si incontrano nel punto **O** e formano un angolo $2\,\beta$. Ovviamente i punti $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{Q_1}$ sono le proiezioni di **G**, **P** e **Q**.

Fissato il sistema di coordinate come rappresentato in Con il sistema di coordinate della figura 1 in posizione possiamo trovare l'equazione del percorso del baricentro del doppio cono mentre rotola lungo il pendio. Per comodità scriviamo XY per il segmento di retta che va da un punto X a un punto Y.

Consideriamo innanzitutto la figura 3. La distanza tra **O** e $\mathbf{G_1}$ è esattamente la coordinata x del punto **G**. Usando la trigonometria di base abbiamo che

$$\tan(\beta) = \frac{P_1G_1}{x} = \frac{RQ_1}{2x}$$

Poiché $P_1Q_1 = PQ$ otteniamo $PQ = \frac{2x}{tan\,(\beta)}$

Prendiamo ora la figura 3. Sia **S** il punto che giace sulla retta **G**, $\mathbf{G_1}$ alla stessa altezza di **P** e **R** per l'apice del cono che giace sulla retta **G**, $\mathbf{G_1}$. [Figura 5]

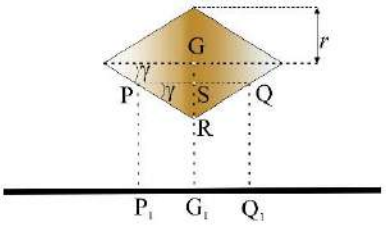


Figura 5

Allora $\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SP}} = \tan(\gamma)$ quindi $RS = SP\tan(\gamma) = \frac{PQ\tan(\gamma)}{2}$

Sappiamo che $PQ = \frac{2x}{\tan(\beta)}$ quindi$RS = SP\tan(\gamma) = \frac{PQ\tan(\gamma)}{2} = x\,tan(\beta)\tan(\gamma)$

Ora la quota $\boldsymbol{y}$ di **G** è $\mathbf{SG_1}$ + **SG**. D'altronde **SG** = $\boldsymbol{r}$-**RS**, dove $\mathbf{2}\boldsymbol{r}$ è il diametro del cono.

Quindi: $SG = r - RS = r - x\tan(\beta)\tan(\gamma)$

Allora: $y = SG_1 + SG = SG_1 + (r - x\tan(\beta)\tan(\gamma))$

Consideriamo ora la figura 6, che riprende la figura 2, notiamo che $\mathbf{G_1}$ è alla distanza $\boldsymbol{x}$ dall'origine del sistema, e quindi

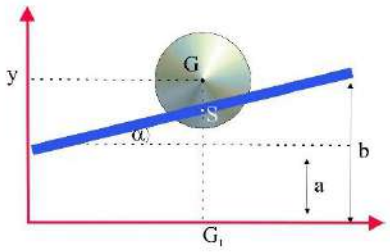


Figura 6

$$\frac{(SG_1 - a)}{x} = \tan(\alpha) \rightarrow SG_1 - a = x\ \tan(\alpha)$$

Pertanto abbiamo

$$y = \big(a + xtan(\alpha)\big) + (r - x\tan(\beta)\tan(\gamma)) = a + r + x(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\tan(\gamma))$$

Il percorso del baricentro del cono è, quindi, descritto dalla retta di equazione

$$\boldsymbol{y = a + r + x\,(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\tan(\gamma))}$$

Dove $(\tan(\alpha) - \tan(\beta)\tan(\gamma))$ è in coefficiente angolare della retta. Perché il movimento avvenga questa retta deve essere inclinata verso il basso (il baricentro può spostarsi solo verso il basso). Ciò significa che il coefficiente angolare deve essere negativo. Perché il paradosso meccanico funzioni deve essere che:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha) < \tan(\beta)\tan(\gamma)}$$

PROBLEMI ED ESERCIZI

a cura di RICCARDO RIZZI

(Per eventuali contributi indirizzare al curatore • Via Toscanini, 18 - 40136 Bologna)

In "salita" lungo un piano inclinato

Ogni laboratorio di fisica è fornito del classico doppio cono che «sale» lungo un piano inclinato; chiarito il «paradosso», il discorso su di esso solitamente si esaurisce senza ulteriori approfondimenti. In un articolo della rivista «Kvant» (*), A, Mitrofanov studia l'esperimento in modo rigoroso e mi pare che possa costituire un utile esercizio di facile realizzazione sia a livello di scuola superiore sia a livello di scuola dell'obbligo.

Si tratta di discutere le condizioni per cui si verifica o meno il «paradosso». L'idea dell'autore sta nel costruire un piano di scorrimento in cui si possa variare l'inclinazione e l'ampiezza dell'angolo della corsia. Tutto ciò si può realizzare facilmente come nella figura 1;

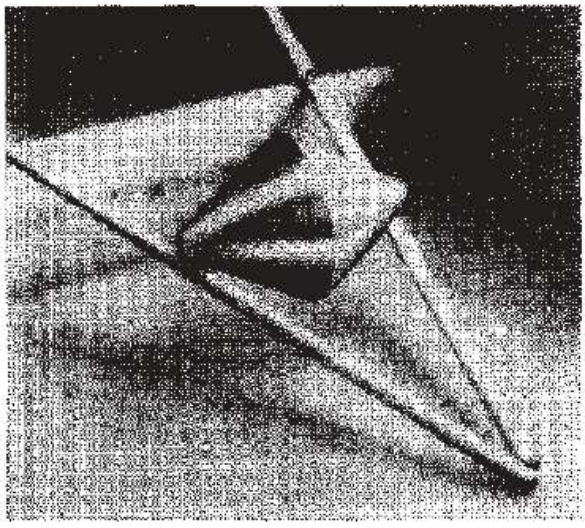


Fig. 1

Il materiale occorrente è molto modesto: due coni uguali di materiale qualsiasi uniti saldamente per le basi, due asticciole identiche e un libro; con le asticciole e il dorso del libro si realizza un piano inclinato a forma di triangolo isoscele.

Vediamo ora come può accadere che, disposto il doppio cono (con l'asse orizzontale) sul binario, si ottenga un moto verso l'alto lungo il piano. Si tratta di studiare le posizioni assunte dal centro di gravità del doppio cono durante il suo rotolamento verso l'alto a cui non corrisponderà un «innalzamento» ma un effettivo «abbassamento» di questo.

Denominiamo con α l'angolo che forma il piano inclinato con il tavolo, con 2β l'angolo al vertice del triangolo isoscele formato dalle asticciole e con 2γ l'angolo al vertice dei coni.

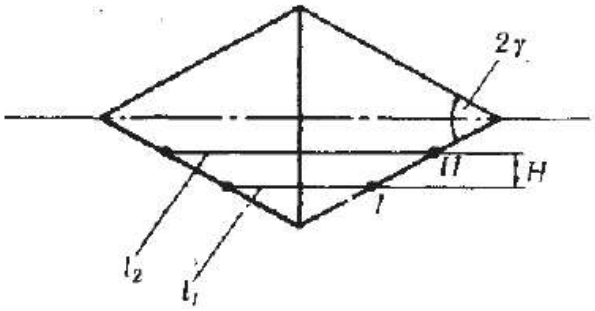


Fig. 2a

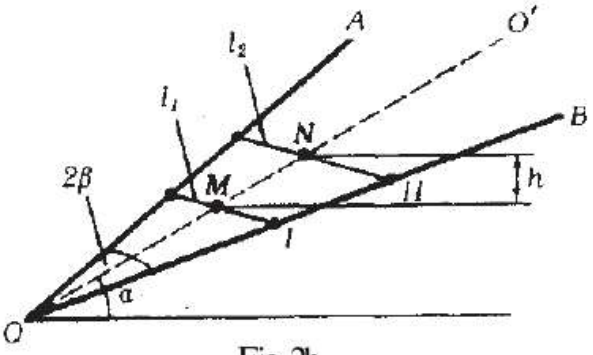


Fig. 2b

Se i coni si spostano verso l'alto, lungo le guide dalla posizione I alla posizione II, indicando con l_1 e l_2 le distanze tra i punti di tangenza delle aste con i coni, si deduce che il centro di gravità discende di (vedi figura 2a)

$$H = \frac{l_2 - l_1}{2} \operatorname{tg} \gamma$$

I punti di contatto dei coni però salgono e questo sollevamento sarà (vedi figura 2b)

$$h = MN \operatorname{sen} \alpha = \frac{l_2 - l_1}{2} \operatorname{cotg} \beta \operatorname{sen} \alpha$$

(*) «Kvant» N. 2 - 1980 pag. 24 - A. Mitrofanov - Vierk po naklonnoi ploskosti (In salita lungo un piano inclinato).

La condizione di scorrimento dei coni verso l'alto sarà:

$$H > h$$

cioè:

$$\frac{l_2 - l_1}{2} \operatorname{tg}\gamma > \frac{l_2 - l_1}{2} \operatorname{cotg}\beta \operatorname{sen}\alpha$$

quindi

$$\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma .$$

Se invece

$$\operatorname{sen}\alpha > \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$$

i coni scenderanno e se

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$$

i coni risulteranno in equilibrio indifferente.

A questo punto Mitrofanov propone alcuni esercizi sperimentali:

1) Verificate sperimentalmente che l'equilibrio indifferente si ha quando $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Con quale esattezza si verifica la relazione?

2) Dimostrate con il calcolo e sperimentalmente che l'equilibrio indifferente si mantiene anche se si sposta perpendicolarmente al dorso del libro il vertice delle aste, rimanendo invariati i punti di contatto di queste con il libro.

3) Teoricamente si può dimostrare che con opportuni valori di γ e di β la condizione di «salita» dei coni è soddisfatta se $\alpha = 90°$ ($\operatorname{sen}\alpha = 1$); cioè quando il piano è verticale. Che risultato fornisce l'esperienza in questo caso?

Da parte mia vorrei aggiungere che si può presentare l'esercizio anche ignorando la trigonometria e ricorrendo alla similitudine dei triangoli, sia per ottenere H che h.

Così indicando con r_c e h_c il raggio e l'altezza dei coni, con h_p e l_p l'altezza e la lunghezza del piano inclinato e con b_t la semibase e h_t l'altezza del triangolo isoscele formato dalle asticciole, la relazione di equilibrio indifferente diviene:

$$\frac{h_p}{l_p} = \frac{b_t}{h_t} \cdot \frac{r_c}{h_c}$$

Da notare che h_t risulta coincidente con l_p e questo consente di comprendere la questione 2). La traduzione della forma trigonometrica in termini geometrici permette, anche a chi ha qualche conoscenza della trigonometria, di capire meglio il significato delle funzioni goniometriche e il ruolo che queste possono giocare nelle espressioni matematiche di una legge fisica.

RICCARDO RIZZI

Le soluzioni degli esercizi di « Praxis » presentati sul numero scorso verranno pubblicate sul n. 2/81 de « La Fisica nella Scuola ».